УДК 517.9

ОДНОРІДНА СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З СТАБІЛЬНОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЮ ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ

В.М. Бобочко , І.О. Зеленська

Побудована рівномірна асимптотика розв'язку системи сингулярно-збурених диференціальних рівнянь з точкою звороту. Розглядається випадок, коли спектр граничного оператора містить кратні і тотожно рівні нулю елементи.

A uniform asymptotic of solution is constructed for a system of singularly perturbed differential equations with a turning point. The paper investigates the case when the spectrum of face operator consists of multiple and zero elements.

Вступ. Розглянемо сингулярно збурене диференціальне рівняння (СЗДР) вигляду

$$\varepsilon^2 y'''(x,\varepsilon) + x\,\tilde{a}(x) y'(x,\varepsilon) + b(x) y(x,\varepsilon) = 0\,, \tag{1}$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $a(x) \equiv x\tilde{a}(x)$, $b(x)$ – необмежено диференційовні функції на відрізку $[0;1]$, тобто рівняння з диференціальною точкою звороту.

Рівняння (1) будемо досліджувати за умови, що

$$\tilde{a}(x) > 0\,, \qquad b(x) < 0\,. \tag{2}$$

Умови (2) забезпечать стабільність точки звороту та існування досить гладкого загального розв'язку виродженого рівняння

$$x\,\tilde{a}(x)\omega'(x) + b(x)\omega(x) = 0\,. \tag{3}$$

Сингулярно збурене диференціальне рівняння Ліувілля з алгебраїчною точкою звороту вивчене досить детально (див. [1-9]). Розроблено декілька методів побудови рівномірної асимптотики розв'язку цього рівняння на всьому відрізку $[0;1]$.

Рівномірна асимптотика розв'язку СЗДР з диференціальною точкою звороту в основному побудована тільки для рівняння третього порядку (див. [8-10]).

У [8-10] досліджено СЗДР (1) за виконання різних умов на коефіцієнти $a(x), b(x)$, причому випадок, коли справедливі умови (2), розглянуто у [8]. В залежності від цих умов точка звороту була стабільною [8-9], або нестабільною [10]. В [8-10], метод розроблений для рівняння Ліувілля [9], узагальнено на побудову рівномірної асимптотики розв'язку СЗДР (1).

Питання про побудову рівномірної асимптотики розв'язку системи двох рівнянь, що відповідає рівнянню Ліувілля, досліджувалось В. Вазовим. Проте, як сказано самим Вазовим ([2], стор. 67), тільки для рівняння другого порядку розроблена деяка теорія, але і вона далеко не повна, нерозв'язаних питань залишилось значно більше, ніж розв'язаних. Дослідження систем СЗДУ з диференціальною точкою звороту авторам невідомі.

Виходячи із сказаного є сенс узагальнити результати, отримані в [8-10] для СЗДР (1) на випадок системи СЗДР.

1. Система диференціальних рівнянь з стабільною диференціальною точкою звороту

Запишемо рівняння (1) у вигляді системи. Для цього введемо нові змінні

$$y = y_1, \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} = y_2, \qquad \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \varepsilon y_1'' = \varepsilon y_2' = y_3,$$

$$\varepsilon^2 y''' = \varepsilon(\varepsilon y''') = \varepsilon(\varepsilon y_1''') = \varepsilon(y_2'') = \varepsilon(y_3').$$

Отже, диференціальне рівняння (1) зводиться до наступної системи СЗДР:

$$\begin{cases} \varepsilon y_1'(x,\varepsilon) - \varepsilon y_2(x,\varepsilon) = 0 \\ \varepsilon y_2'(x,\varepsilon) - y_3(x,\varepsilon) = 0 \\ \varepsilon y_3'(x,\varepsilon) + x\widetilde{a}(x) y_2(x,\varepsilon) + b(x) y_1(x,\varepsilon) = 0. \end{cases}$$

Запишемо цю систему у векторному вигляді. Маємо систему

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon) - A(x,\varepsilon) Y(x,\varepsilon) = 0. \qquad (1.1)$$

Тут

$$A(x,\varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

– відома матриця, тобто

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b(x) & -x\widetilde{a}(x) & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} y_1(x,\varepsilon) \\ y_2(x,\varepsilon) \\ y_3(x,\varepsilon) \end{pmatrix} -$$

шукана вектор-функція.

В цій роботі буде побудована рівномірна асимптотика розв'язку (РАР) системи (1.1) на відрізку $[0;1]$ за умови наявності в цій системі точки звороту $x = 0$.

Характеристичне рівняння системи (1.1) має вигляд:

$$|A(x,0) - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -b(x) & -x\widetilde{a}(x) & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - x\widetilde{a}(x)\lambda = 0. \qquad (1.3)$$

Коренями цього рівняння є

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{x\widetilde{a}(x)}. \qquad (1.4)$$

З умови (1.2) бачимо, що у випадку, коли точка $x = 0$ є точкою звороту для системи (1.1), то виконується наступні умови: $tr\, A(x,0) \equiv 0$, $det\, A(0,0) = 0$.

2. Регуляризація системи сингулярно збурених рівнянь

Для побудови РАР системи (1.1) застосуємо методику, розроблену для рівняння Ліувілля і систем СЗДР з алгебраїчною точкою звороту (див. [7-

12]). З метою виділення всіх істотно особливих функцій (ІОФ), що виникають в розв'язку системи (1.1) за рахунок особливої точки $\varepsilon = 0$, введемо регуляризуючу змінну $t = \varepsilon^{-p} \cdot \varphi(x)$, де показник p і регуляризуюча функція $\varphi(x)$ підлягають визначенню.

Для визначення "розширеної" функції одержимо "розширене" векторне рівняння

$$\widetilde{L}_\varepsilon\, \widetilde{y}(x,t,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{1-p}\varphi'(x)\frac{\partial \widetilde{y}(x,t,\varepsilon)}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial \widetilde{y}(x,t,\varepsilon)}{\partial x} - A(x,\varepsilon)\widetilde{y}(x,t,\varepsilon) = 0\,. \quad (2.1)$$

Асимптотику розв'язку розширеного рівняння (2.1) будуємо у вигляді

$$\widetilde{y}(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{2} D_k(x,t,\varepsilon) + \omega(x,t,\varepsilon). \quad (2.2)$$

Тут

$$D_k(x,t,\varepsilon) = \alpha_k(x,\varepsilon)U_k(t) + \varepsilon^{\nu}\beta_k(x,\varepsilon)U_k{}'(t) \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} \varepsilon^{s_1}\alpha_{k1}(x,\varepsilon) \\ \varepsilon^{s_2}\alpha_{k2}(x,\varepsilon) \\ \varepsilon^{s_3}\alpha_{k3}(x,\varepsilon) \end{pmatrix} U_k(t) + \varepsilon^{\gamma} \begin{pmatrix} \varepsilon^{k_1}\beta_{k1}(x,\varepsilon) \\ \varepsilon^{k_2}\beta_{k2}(x,\varepsilon) \\ \varepsilon^{k_3}\beta_{k3}(x,\varepsilon) \end{pmatrix} U_k{}'(t), \quad (2.3)$$

$$\omega(x,\varepsilon) \equiv colon(\omega_1(x,\varepsilon),\ \omega_2(x,\varepsilon),\ \omega_3(x,\varepsilon)), \quad (2.4)$$

де $\theta(x,\varepsilon) \equiv \{\alpha_{ks}(x,\varepsilon), \beta_{ks}(x,\varepsilon),\ \omega_s(x,\varepsilon)\}$, $s = \overline{1;3}$ – аналітичні вектор-функції відносно малого параметра $\varepsilon > 0$ і нескінченно диференційовні за змінною $x \in [0;1]$, які необхідно визначити, $U_k(t)$, $k = 1,2$ – функції Ейрі-Дородніцина (див.[4]).

Спочатку вивчимо дію розширеного оператора $\widetilde{L}_\varepsilon$ на вектор-функцію $D_k(x,t,\varepsilon)$ і підставимо результат цієї дії в однорідне розширене рівняння (2.1). Отримаємо рівність

$$\widetilde{L}_\varepsilon(\alpha_k(x,\varepsilon)U_k(t) + \varepsilon^{\gamma}\beta_k(x,\varepsilon)U_k{}'(t)) = \varepsilon^{1-p}\alpha_k(x,\varepsilon)\varphi'(x)U_k{}'(t) -$$
$$- \varepsilon^{1+\gamma-2p}\beta_k(x,\varepsilon)\varphi'(x)\varphi(x)U_k(t) - A(x,\varepsilon)\alpha_k(x,\varepsilon)U_k(t) -$$
$$- \varepsilon^{\gamma}A(x,\varepsilon)\beta_k(x,\varepsilon)U_k{}'(t) + \varepsilon\alpha_k{}'(x)U_k(t) + \varepsilon^{1+\gamma}\beta_k{}'(x)U_k{}'(t) = 0.$$

Зрівняємо коефіцієнти біля ІОФ $U_k(t)$, $k = 1,2$ та їх похідних. Маємо наступні векторні рівняння ($k = 1,2$):

$$U_k{}'(t): \varepsilon^{1-p}\alpha_k(x,\varepsilon)\varphi'(x) - \varepsilon^{\gamma}[A_0(x) + \varepsilon A_1]\beta_k(x,\varepsilon) = -\varepsilon^{1+\gamma}\beta_k{}'(x,\varepsilon), \quad (2.5)$$

$$U_k(t): -\varepsilon^{1+\gamma-2p}\beta_k(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) - [A_0(x) + \varepsilon A_1]\alpha_k(x,\varepsilon) = -\varepsilon\alpha_k{}'(x,\varepsilon). \quad (2.6)$$

Запишемо однорідні векторні рівняння (2.5) і (2.6), поки що з врахуванням тільки основної матриці $A_0(x)$, у вигляді алгебраїчних систем рівнянь $(k = 1;2)$. Маємо

$$\begin{cases} \varepsilon^{1-p+s_1}\alpha_{k1}(x,\varepsilon)\varphi'(x)=0 \\ \varepsilon^{1-p+s_2}\alpha_{k2}(x,\varepsilon)\varphi'(x)-\varepsilon^{\gamma+k_3}\beta_{k3}(x,\varepsilon)=0 \\ \varepsilon^{1-p+s_3}\varphi'(x)\alpha_{k3}(x,\varepsilon)+\varepsilon^{\gamma+k_1}b(x)\beta_{k1}(x,\varepsilon)+\varepsilon^{\gamma+k_2}a(x)\beta_{k2}(x,\varepsilon)=0 \\ -\varepsilon^{1+\gamma-2p+k_1}\beta_{k1}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)=0 \\ -\varepsilon^{1+\gamma-2p+k_2}\beta_{k2}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)-\varepsilon^{s_3}\alpha_{k3}(x,\varepsilon)=0 \\ -\varepsilon^{1+\gamma-2p+k_3}\beta_{k3}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)+\varepsilon^{s_1}b(x)\alpha_{k1}(x,\varepsilon)+\varepsilon^{s_2}a(x)\alpha_{k2}(x,\varepsilon)=0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Нагадаємо, що ми хочемо, щоб $\alpha_{ks}(x,\varepsilon),\ \beta_{ks}(x,\varepsilon),\quad s=\overline{1;3}$ – були аналітичними вектор-функціями відносно малого параметра $\varepsilon>0$. Тому будемо вимагати, щоб в одержаній алгебраїчній системі рівнянь (2.7) рівняння були регулярно збуреними відносно малого параметра $\varepsilon>0$. Для цього показники степенів малого параметра в кожному рівнянні повинні бути однакові, тобто повинно пройти скорочення малого параметру з цими степенями. Одержимо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1-p+s_1=0 \\ 1-p+s_2=\gamma+k_3 \\ 1-p+s_3=\gamma+k_1=\gamma+k_2 \\ 1+\gamma-2p+k_1=0 \\ 1+\gamma-2p+k_2=s_3 \\ 1+\gamma-2p+k_3=s_1=s_2. \end{cases} \tag{2.8}$$

Дослідимо дану систему рівнянь. Після певних перетворень отримаємо

$$p=\frac{2}{3},\quad \gamma=\frac{1}{3},\quad k_1=k_2=s_3=0,\quad s_1=s_2=k_3=\frac{-1}{3}. \tag{2.9}$$

З врахуванням (2.9) векторні рівняння (2.5) і (2.6) запишемо у вигляді $\left(\mu=\varepsilon^{1/3}\right)$

$$U_k'(t):\alpha_k(x,\varepsilon)\varphi'(x)-A_0(x)\beta_k(x,\varepsilon)=-\mu^3\beta_k'(x,\varepsilon)+\mu^3A_1\beta_k(x,\varepsilon), \tag{2.10}$$

$$U_k(t):\beta_k(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)+A_0(x)\alpha_k(x,\varepsilon)=\mu^3\alpha_k'(x,\varepsilon)-\mu^3A_1\alpha_k(x,\varepsilon). \tag{2.11}$$

При показниках (2.9) векторні рівняння (2.10), (2.11) можна записати у вигляді наступної системи алгебраїчних рівнянь $(k=1;2)$

$$\begin{cases} \alpha_{k1}(x,\varepsilon)\varphi'(x)=\mu^3\left[\beta_{k2}(x,\varepsilon)-\beta_{k1}'(x,\varepsilon)\right] \\ \alpha_{k2}(x,\varepsilon)\varphi'(x)-\beta_{k3}(x,\varepsilon)=-\mu^3\beta_{k2}'(x,\varepsilon) \\ \varphi'(x)\alpha_{k3}(x,\varepsilon)+b(x)\beta_{k1}(x,\varepsilon)+a(x)\beta_{k2}(x,\varepsilon)=-\mu^3\beta_{k3}'(x,\varepsilon) \\ -\beta_{k1}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)=-\mu^3\left[\alpha_{k1}'(x,\varepsilon)-\alpha_{k2}(x,\varepsilon)\right] \\ -\beta_{k2}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)-\alpha_{k3}(x,\varepsilon)=-\mu^3\alpha_{k2}'(x,\varepsilon) \\ -\beta_{k3}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)+b(x)\alpha_{k1}(x,\varepsilon)+a(x)\alpha_{k2}(x,\varepsilon)=-\mu^3\alpha_{k3}'(x,\varepsilon), \end{cases} \tag{2.12}$$

тобто вона буде вже регулярно збуреною системою.

3. Побудова формальних розв'язків однорідної розширеної системи

Розв'язок системи (2.12) шукаємо у вигляді вектор-функцій $(k=1;2)$

$$D_k(x,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r\left[\alpha_{kr}(x)U_k(t)+\beta_{kr}(x)U_k{}'(t)\right] \tag{3.1}$$

Для визначення компонент вектор-функцій $\alpha_{kr}(x)=colon(\alpha_{k1r}(x),\alpha_{k2r}(x),\alpha_{k3r}(x))$ та $\beta_{kr}(x)=colon(\beta_{k1r}(x),\beta_{k2r}(x),\beta_{k3r}(x))$ отримаємо наступні рекурентні системи рівнянь:

$$\Phi(x)Z_{k0}(x)=0,\qquad \Phi(x)Z_{kr}(x)=F\,Z_{k(r-3)}(x),\quad r\geq 1. \tag{3.2}$$

Тут $Z_{kr}(x)=colon(\alpha_{k1r}(x),\alpha_{k2r}(x),\alpha_{k3r}(x),\beta_{k1r}(x),\beta_{k2r}(x),\beta_{k3r}(x))$, а

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}\varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & \varphi'(x) & b(x) & x\widetilde{a}(x) & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\varphi(x)\varphi'(x) & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\varphi(x)\varphi'(x) & 0\\ b(x) & x\widetilde{a}(x) & 0 & 0 & 0 & -\varphi(x)\varphi'(x)\end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$F\,Z_{k(r-3)}(x)=colon\begin{pmatrix}\left[\beta_{k2(r-3)}(x)-\beta_{k1(r-3)}{}'(x)\right], & -\beta_{k2(r-3)}{}'(x), & -\beta_{k3(r-3)}{}'(x),\\ \left[\alpha_{k1(r-3)}{}'(x)-\alpha_{k2(r-3)}(x)\right], & \alpha_{k2(r-3)}{}'(x), & \alpha_{k3(r-3)}{}'(x)\end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник цієї системи. Маємо

$$det\,\Phi(x)=\left(-a^2(x)+2a(x)\varphi(x)\varphi'^2(x)-\varphi^2(x)\varphi'^4(x)\right)\cdot\varphi(x)\varphi'^2(x).$$

На даний момент регуляризуюча функція $\varphi(x)$ ще не визначена. Тому визначимо її як розв'язок задачі

$$\varphi^2(x)\varphi'^4(x)-2a(x)\varphi(x)\varphi'^2(x)+a^2(x)=0,\quad \varphi(0)=0,$$

яку можемо записати у простішому вигляді, тобто

$$[\varphi'(x)]^2\varphi(x)=a(x)\equiv x\widetilde{a}(x),\quad \varphi(0)=0. \tag{3.4}$$

Розв'язком задачі (3.4) буде функція $\varphi(x)=\left(\dfrac{3}{2}\int_0^x\sqrt{a(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}}$.

При такому виборі регуляризуючої функції $\varphi(x)$ визначник матриці (3.3) дорівнює нулю, тобто $det\,\Phi(x)\equiv 0$. Існує нетривіальний розв'язок однорідної системи $\Phi(x)Z_{kr}(x)=0$, $r=\overline{0;2}$ вигляду

$$Z_{kr}(x)=colon\left(0,\frac{1}{\varphi'(x)}\beta_{k3r}(x),-\frac{a(x)}{\varphi'(x)}\beta_{k2r}(x),0,\beta_{k2r}(x),\beta_{k3r}(x)\right), \tag{3.5}$$

де $\beta_{ksr}(x)$, $k=1;2$, $s=2;3$ – до певного часу довільні, досить гладкі функції при $x\in[0;1]$.

Займемось розв'язуванням неоднорідних систем (3.2). Спочатку розглянемо ці системи коли $r=3$. Врахувавши одержаний розв'язок (3.5), будемо мати

$$\begin{cases}\varphi'(x)\alpha_{k13}(x)=\beta_{k20}(x)-\beta_{k10}'(x)\equiv\beta_{k20}(x)\\ \varphi'(x)\alpha_{k23}(x)-\beta_{k33}(x)=-\beta_{k20}'(x)\\ a(x)\alpha_{k23}(x)+b(x)\alpha_{k13}(x)-\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k33}(x)=-\alpha_{k30}'(x)\end{cases} \tag{3.6}$$

та

$$\begin{cases}-\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k13}(x)=\alpha_{k10}'(x)-\alpha_{k20}(x)\equiv-\alpha_{k20}(x)\equiv-[\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k30}(x)\\ -\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k23}(x)-\alpha_{k33}(x)=\alpha_{k20}'(x)\equiv\dfrac{d}{dx}\left([\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k30}(x)\right)\\ \varphi'(x)\alpha_{k33}(x)+b(x)\beta_{k13}(x)+a(x)\beta_{k23}(x)=-\beta_{k30}'(x).\end{cases} \tag{3.7}$$

З перших рівнянь систем (3.6) і (3.7) визначимо функції $\alpha_{k13}(x)=[\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k20}(x)$ та $\beta_{k13}(x)=-[\varphi'(x)]^{-2}[\varphi(x)]^{-1}\beta_{k30}(x)$. Тоді системи (3.6) і (3.7) набудуть вигляду

$$\begin{cases}\varphi'(x)\alpha_{k23}(x)-\beta_{k33}(x)=-\beta_{k20}'(x)\\ a(x)\alpha_{k23}(x)-\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k33}(x)=-\alpha_{k30}'(x)-b(x)\alpha_{k13}(x)\end{cases} \tag{3.8}$$

та

$$\begin{cases}-\alpha_{k33}(x)-\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k23}(x)=\alpha_{k20}'(x)\equiv\dfrac{d}{dx}\left([\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k30}(x)\right)\\ \varphi'(x)\alpha_{k33}(x)+a(x)\beta_{k23}(x)=-\beta_{k30}'(x)-b(x)\beta_{k13}(x).\end{cases} \tag{3.9}$$

Регуляризуюча функція $\varphi(x)$ визначена як розв'язок задачі (3.4). Тому визначники цих систем однакові і тотожно рівні нулеві, тобто $\Delta(x)=[\varphi'(x)]^2\varphi(x)+a(x)\equiv 0$. Отже, в загальному випадку не існують розв'язки неоднорідних систем алгебраїчних рівнянь (3.8) і (3.9). Тому необхідно дослідити більш детально праві частини цих систем. Згідно теореми Кронеккера-Капеллі для того, щоб існував нетривіальний розв'язок систем (3.8) і (3.9) необхідно і досить, щоб ранги розширених матриць співпадали з відповідними рангами матриць цих систем. Для виконання цих умов скористаємось довільністю функцій $\beta_{ik0}(x)$, які містяться у правих частинах систем (3.8) і (3.9) наступним чином.

Оскільки маємо системи двох рівнянь, то умови теореми Кронеккера-Капеллі еквівалентні виконанню умов

$$\frac{\varphi'(x)}{a(x)}\equiv\frac{-1}{-\varphi(x)\varphi'(x)}=\frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\varphi'(x)}\beta_{k30}(x)\right)}{\beta_{k30}'(x)},\qquad k=1,2 \tag{3.10}$$

і

$$\frac{\varphi'(x)}{-1} \equiv \frac{a(x)}{-\varphi(x)\varphi'(x)} = \frac{\frac{d}{dx}\left(-\frac{a(x)}{\varphi'(x)}\beta_{k20}(x)\right)}{\beta_{k20}'(x)}, \qquad k=1,2. \tag{3.11}$$

З (3.10) при фіксованому $k=1,2$ одержимо диференціальне рівняння

$$(1-\varphi(x))\beta_{k30}'(x) + \frac{\varphi(x)\varphi''(x)}{\varphi'(x)}\beta_{k30} = 0. \tag{3.12}$$

З (3.11) при фіксованому $k=1,2$ одержимо диференціальне рівняння

$$(\varphi(x)-1)\beta_{k20}'(x) + \frac{\varphi'^2(x)+\varphi''(x)}{\varphi'(x)}\beta_{k20} = 0. \tag{3.13}$$

Оскільки $\varphi(x)-1 \neq 0$ для всіх $x \in [0;1]$, то існують досить гладкі розв'язки однорідних диференціальних рівнянь (3.12) і (3.13), які запишемо у вигляді $\beta_{ks0}(x) = \beta_{k30}^0 \cdot \beta_{k30}(x)$, $k=1,2$, $s=2;3$, де $\beta_{ks0}^0(x)$ – довільні сталі, $\widetilde{\beta}_{ks0}(x)$ – частинні, досить гладкі для всіх $x \in [0;1]$, розв'язки однорідних рівнянь (3.12) і (3.13).

При такому визначенні вектор-функцій $Z_{k0}(x)$ існують розв'язки неоднорідних систем алгебраїчних рівнянь (3.8) і (3.9) вигляду

$$Z_{k1}(x) = colon\begin{pmatrix} [\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k20}(x), \dfrac{\beta_{k31}(x)+\alpha_{k20}'(x)}{\varphi'(x)}, \dfrac{\alpha_{k30}'(x)-a(x)\beta_{k21}(x)}{\varphi'(x)}, \\ [\varphi(x)]^{-1}[\varphi'(x)]^{-2}\beta_{k20}(x), \beta_{k21}(x), \beta_{k31}(x) \end{pmatrix},$$

де $\beta_{k21}(x)$ та $\beta_{k31}(x)$, як і в (3.5), до певного часу довільні, достатньо гладкі функції для всіх $x \in [0;1]$.

Продовжуючи далі розв'язувати ітераційні системи алгебраїчних рівнянь (3.6) і (3.7) при $r>1$, методом математичної індукції можна показати, що ці системи рівнянь асимптотично коректні в такому смислі. Якщо вимагати існування розв'язків систем рівнянь (3.6) і (3.7) при $r=\overline{0;q}$, то кожна з цих систем при $r=\overline{0;q-1}$ і фіксованому $k=1;2$ визначається з точністю до двох довільних скалярних множників $\beta_{k2r}^0(x)$ і $\beta_{k3r}^0(x)$, які утворюють довільний вектор $\beta_{kr}^0 = colon(\beta_{k1r}^0, \beta_{k2r}^0, \beta_{k3r}^0)$.

Висновок. Таким чином, розв'язуючи поступово системи рівнянь (3.6) і (3.7), отримаємо два формальні розв'язки розширеного векторного рівняння (2.10) вигляду

$$D_k(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=o}^{\infty}\varepsilon^r\left[\alpha_{kr}(x)U_k(t) + \varepsilon^{1/3}\beta_k(x,\varepsilon)U_k'(t)\right], \quad k=1;2, \tag{3.14}$$

де $\alpha_{kr}(x) = colon(\alpha_{k1r}(x), \alpha_{k2r}(x), \alpha_{k3r}(x))$ та
$\beta_{kr}(x) = colon(\beta_{k1r}(x), \beta_{k2r}(x), \beta_{k3r}(x))$ відомі вектор-функції.

Проведемо звуження в отриманих формальних розв'язках (3.14) при $t = \varepsilon^{-2/3} \cdot \varphi(x)$. Тоді отримаємо два формальні розв'язки досліджуваного векторного рівняння (1.1) вигляду

$$D_k\left(x, \varepsilon^{-2/3}\varphi(x), \varepsilon\right) = \sum_{r=o}^{\infty} \varepsilon^r \left[\alpha_{kr}(x) U_k\left(\varepsilon^{-2/3}\varphi(x)\right) + \varepsilon^{1/3}\beta_k(x,\varepsilon) U_k'(t)\Big|_{t=\varepsilon^{-2/3}\varphi(x)}\right],$$

$$k = 1;2 \quad (3.15)$$

Третій формальний розв'язок векторного рівняння (1.1) будуємо у вигляді (2.4), тобто у вигляді

$$\omega(x,\varepsilon) \equiv \sum_{r=o}^{\infty} \varepsilon^r \omega_r(x) \equiv colon\left(\sum_{r=o}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{1r}(x),\ \sum_{r=o}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{2r}(x),\ \sum_{r=o}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{3r}(x)\right). \quad (3.16)$$

Підставивши (3.16) у рівняння (1.1), отримаємо наступну рекурентну систему векторних рівнянь:

$$A_0(x)\omega_0(x) = 0, \quad A_r(x)\omega_r(x) = -A_1(x)\omega_{(r-1)}(x) - \omega_{(r-1)}'(x), \quad r \geq 1. \quad (3.17)$$

Дослідимо розв'язок однорідного векторного рівняння $A_0(x)\omega_0(x) = 0$. Маємо $\omega_{03}(x) \equiv 0$ і систему двох рівнянь

$$\begin{cases} \omega_{01}'(x) - \omega_{02}(x) = 0 \\ x\tilde{a}(x)\omega_{02}(x) + b(x)\omega_{01}(x) = 0. \end{cases}$$

З цієї системи отримаємо наступне скалярне диференціальне рівняння:

$$x\,\tilde{a}(x)\omega_{01}'(x) + b(x)\omega_{01}(x) = 0. \quad (3.18)$$

Розв'язок однорідного рівняння (3.18) має вигляд

$$\omega_{01}(x) = \omega_{01}^0 \cdot exp\left\{-\int \frac{b(x)}{x\tilde{a}(x)}dx\right\}, \quad (3.19)$$

де ω_{01}^0 – довільна стала.

До цього часу ми не використовували умову на коефіцієнт $b(x)$. З врахуванням того, що $b(x) < 0$ (див. умови (2)) маємо $\frac{-b(0)}{\tilde{a}(0)} = K > 0$. Тому розв'язок (3.19) є досить гладкою функцією на всьому відрізку $[0;1]$, включаючи і точку $x = 0$.

Скориставшись розв'язком (3.19), отримаємо розв'язок $\omega_{02}(x) = \omega_{01}'(x) = -\omega_{01}^0 \cdot \frac{b(x)}{x\tilde{a}(x)} exp\left\{-\int \frac{b(x)}{x\tilde{a}(x)}dx\right\}$.

Таким чином, нами побудоване нульове наближення

$$\omega_0(x) = colon(\omega_{01}(x), \omega_{02}(x), \omega_{03}(x),) \equiv$$

$$\equiv colon\left(\omega_{01}^0 \cdot exp\left\{-\int \frac{b(x)}{x\tilde{a}(x)}dx\right\}, \omega_{01}^0 \cdot \frac{b(x)}{x\tilde{a}(x)} exp\left\{-\int \frac{b(x)}{x\tilde{a}(x)}dx\right\}, 0\right),$$

яке містить одну довільну сталу ω_{01}^0.

На наступному кроці отримаємо неоднорідну систему рівнянь, при розв'язуванні якої знову отримаємо розв'язок, який буде містити одну довільну сталу ω_{11}^{0}. Продовжуючи далі розв'язувати системи рівнянь (3.17), поступово визначимо всі розв'язки $\omega_r(x)$, тобто отримаємо третій розв'язок системи (1.1) у вигляді формального ряду (3.16).

Теорема. Нехай: 1) $a(x) \equiv x\widetilde{a}(x),\ b(x) \in C^{\infty}[0;1]$; 2) виконуються умови (2). Тоді;

а) розширене однорідне векторне рівняння (2.1) має три формальні розв'язки, зображені у вигляді формальних рядів (3.1), $k = 1;2$ та (3.16);

б) звуження формальних рядів (3.1), $k = 1;2$ при $t = \varepsilon^{-2/3}\varphi(x)$ та ряд (3.16) утворюють три лінійно незалежні розв'язки однорідної системи диференціальних рівнянь (1.1).

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464~с.
2. Wasow W. Linear turning point theory. – Springer-Verlaq New York Ins., 1985. – 243 p.
3. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений.– М., 1981.
4. Дородницын А.А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // УМН. – 1952. –Т. 27, вып. 6(52). – С. 3–96.
5. Langer R.E. The asymptotic solutions of a linear differential equations of the second order with two turning points // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. – V. 90 – P.~113-142.
6. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. V. 226. – P. 227-241.
7. Бобочко В.М., Перестюк М.О. Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту. – Київ: Наукова думка. 2002. – 310 с.
8. Бобочко В.Н. Дифференциальная точка поворота в теории сингулярных возмущений. I // Изв. Вузов. Математика. – 2002. – №3. С. 3-14.
9. Бобочко В.Н. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с точкой поворота. II // Изв. Вузов. Математика. – 2002.– № 5. С. 3–13.
10. Бобочко В.Н. Нестабильная дифференциальная точка поворота в теории сингулярных возмущений. I // Изв. Вузов. Математика. – 2004. – С. .
11. Бобочко В.Н. Система дифференциальных уравнений с сильной точкой поворота // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, №11. – С. 1543-1547.
12. Бобочко В.Н. Система дифференциальных уравнений с точкой поворота в случае недиагонализируемого предельного оператора // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, №10. – С. 1304-1312.

Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В.Винниченка

Надійшло 25 березня 2006 р.